

實驗二：R-L-C 電子電路元件與阻抗分析

前言

本實驗的目的是介紹電子電路中最基本也最常用到的三個被動元件 (passive component)：電阻 (resistor, R)、電容 (capacitor, C)、與電感 (inductor, L)，它們都是線性電路 (linear circuit) 中最常用到的元件。同時將引進阻抗 (impedance) 的概念，介紹這三個元件的電壓-電流關係，其中將會使用到複數 (complex number)、相位 (phasor)、與相位圖 (phasor diagram)，以表現電壓、電流、與阻抗三者之間的關係。根據複數形式的相位與阻抗表示方法，可以分析 R-C-L 三種元件任意組合後的電路特性；最後介紹由 R-C-L 三種元件組成的電路與簡單的濾波器 (filter)。

基本原理

2-1 電阻(Resistor and Resistance, R)

2-1.1 電阻的種類與功率

電阻可以分為固定電阻(電阻值為固定)與可變電阻(電阻值為可變)二種。常用的固定電阻有碳膜電阻 (carbon Resistors) 或金屬膜電阻 (Metal Film Resistors)，依照其標示值的精確度，一般可分為普通電阻與精密電阻。

可變電阻通常有三個接腳與一個旋鈕，其中最外側二個接腳之間的電阻值為固定，假設為 $1\text{ M}\Omega$ ，中間接腳對另外二個接腳的電阻值是由旋鈕控制，變化量可由 $0\ \Omega$ 到 $1\text{ M}\Omega$ ；可變電阻也可分為普通可變電阻與精密可變電阻，精密可變電阻的旋鈕可轉圈數較多，因此可以較精確地調整到所需要的電阻值，普通可變電阻則只有幾圈轉數，甚至只有一轉，因此較粗略。可變電阻的符號如圖 2-1.1。



圖 2-1.1 可變電阻的符號

電阻依照其所能承受的功率 (power, 單位是 Watt or W)，可以分為 $1/8\text{ W}$ 、 $1/4\text{ W}$ 、 $1/2\text{ W}$ 、 1 W 、 2 W 、或更大的功率，電子實驗常用的是 $1/8\text{ W}$ 與 $1/4\text{ W}$ ，大功率電阻的體積較大，例如水泥塊電阻。電阻的功率在 DC 時為 $Power =$

$$IV = I^2R = V^2/R$$

在 AC 時為

$Power = (1/2) (VP^2 / R)$ ，其中 VP 為正弦波的振幅（峰值或谷值）。

舉例而言，同樣是 1/8W 的電阻，電阻值愈小，其能安全操作的電壓愈小。

2-1.2 電阻的色碼與標示

一般常用的非精密型固定電阻的大小與精度由四個色環所組成的色碼來標示，如圖 2-1.2 所示；前三個色環表示電阻值的大小，第四個色環表示電阻值的精確度。前二個色環一定是由下列十個顏色中選出：黑、棕、紅、橙、黃、綠、藍、紫、灰、白，分別對應 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9，如表一所示，因此產生一個由 01~99 的數字；第三個色環大多時候仍然是由上述 10 個顏色中選出，其所對應之數值作為 10 的次方數，例如黑色對應 0，因此是 $10^0 = 1$ ；橙色對應 3，因此是 $10^3 = 1k$ (kilo)；藍色對應 6，因此是 $10^6 = 1M$ (Mega)，將此一 10 的次方數乘以前二個色環所構成之 01~99 的數字，即為此電阻之電阻值，或稱歐姆值，因為單位為歐姆 (Ω)。舉例而言，前三個色環如果分別是黃、紫、紅，其對應之數字為 4、7、2，因此電阻值為 $47 \times 10^2 = 4700 = 4.7 k\Omega$ 。當電阻值很小時 ($0.01 \sim 9.9 \Omega$)，第三個色環才會是金或銀色，例如前三個色環分別是棕、紅、金，其對應之數字為 1、2、-1，因此電阻值為 $12 \times 10^{-1} = 1.2 \Omega$ 。最後一個（第四個）色環代表所標示電阻值的精確度，亦即標示電阻值與真正電阻值的誤差範圍，常見的是金、銀、或無色，分別代表 5%、10%、與 20% 的誤差範圍，比較精密的電阻其第四環才會是棕、紅、橙、黃，分別對應 1%、2%、3%、與 4% 的誤差範圍。精度優於 1% 的一般電阻很少見。

精密電阻因為標示值的精度較高，需要較多的有效位數，因此由五個色環所組成的色碼來標示，前三個色環由對應 0~9 的十個顏色中選出，如前所述，因此產生一個由 001~999 的數字，第四個色環其所對應之數值作為 10 的次方數，第五個色環表示電阻值的精確度。



圖 2-1.2 一般電阻與精密電阻的色碼與標示

表 2-1. 電阻的色碼與標示

顏色	黑	棕	紅	橙	黃	綠	藍	紫	灰	白	金	銀	無色
Color	Black	Brown	Red	Orange	Yellow	Green	Blue	Violet	Gray	White	Gold	Silver	No Color
第一環	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	X	X	X
第二環	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	X	X	X
第三環	0	1	2	3	4	5	6	7	8	X	-1	-2	X
	(1)	(10)	(100)	(1k)	(10k)	(100k)	(1M)	(10M)	(100M)		(0.1)	(0.01)	
第四環	X	±1%	±2%	±3%	±4%	±0.5%	±0.25%	±0.1%	±0.05%	X	±5%	±10%	±20%

2-1.3 電阻的阻抗 (Impedance)

元件的阻抗是指元件兩端的電壓（或跨壓、壓降、電位差）和通過元件電流的比值；對電阻而言，阻抗即是電阻值。電阻值是一個實數，因此電壓和電流是同相的 (in-phase)，或者說二者之間的相位差是 0，也就是電壓和電流對時間的函數是完全相似的，只是差一個比值，如圖 2-1.3 所示。電阻的阻抗為一固定常實數的另一個重要意義是：電阻的阻抗值與頻率無關，無論是高頻率的信號或低頻率的信號，電阻元件兩端的電壓和通過的電流比值是一樣的。

$$R = Z = v(t) / i(t)$$

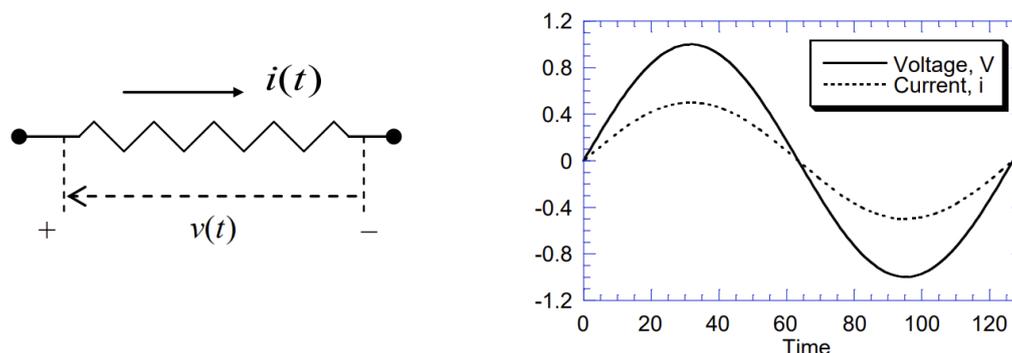


圖 2-1.3 電阻的電壓與電流關係

2-1.4 電阻的耗能功率

眾所皆知，電流流經電阻後，電能會轉換成為熱能而損失，因此電阻是一個耗能元件，其消耗能量之瞬間功率為 $P = IV = I^2R = V^2/R$ (Watt)；假設電壓為一正弦波之交流信號， $V = V_p \cos(\omega t)$ ， V_p 為此一信號的振幅 (Amplitude) 或稱電壓峰值，則其瞬間之功率為 $P = [V_p^2 \cos^2(\omega t)]/R$ ，其消耗能量之平均功率為

$$P_{ave} = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{V_p^2}{R} \cdot \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \frac{V_p^2}{R}$$

如果定義 $V_{RMS} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot V_p = 0.707 \cdot V_p$ ，則電阻 R 的平均耗能功率為

$$P_{ave} = \frac{V_{RMS}^2}{R}$$

因此， $V_p \cos(\omega t)$ 交流電 (AC) 經過一個電阻的功率消耗，與 $0.707V_p = V_{RMS}$ 的直流電 (DC) 加載於該電阻的功率消耗是一樣的。

2-2 電容 (Capacitor and Capacitance, C)

2-2.1 電容的種類

電容的種類有許多種，常用的固定電容有陶瓷 (ceramic) 電容、雲母 (Mica) 電容、紙 (paper) 電容、塑膠膜電容、電解質電容 (electrolytic capacitor) 等等。如果依電容值的可變與否，可以分成“固定電容器”與“可變電容器”二大類。如果依電容是否有極性 (或方向性)，則可以分成“無極性電容器”與“有極性電容器”二大類，如圖 2-2.1。一般的電容器是無極性的，因此電容器的二根接腳沒有差別，在電路的使用上可以互換；大電容值的電解質電容是有極性的，因此電容器的二根接腳有一長一短，長腳為正 (+) 極，短腳為負 (-) 極，有些電容器上會直接以“+”或“-”的符號標示；使用有極性電容器時必須依照其極性，使正極的電壓經常是高於負極的電壓，否則會造成電容器的永久性傷害。

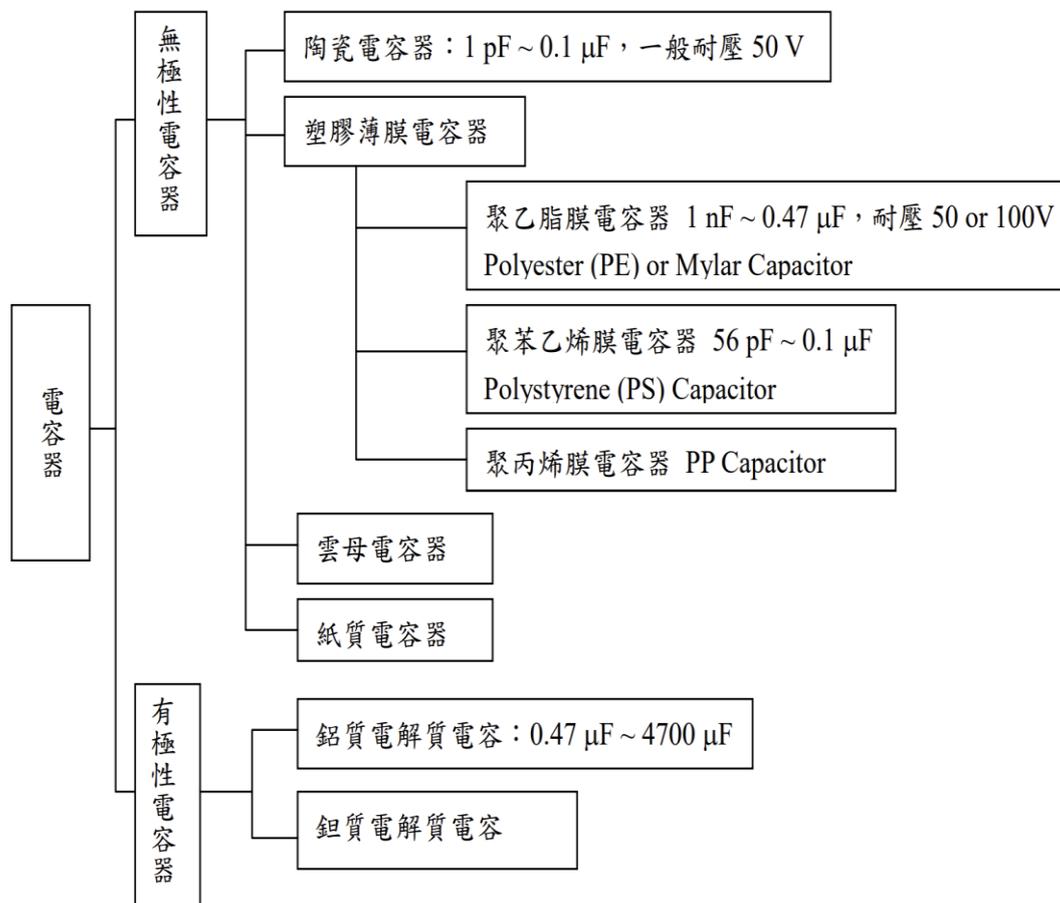


圖 2-2.1 電容器的種類

2-2.2 電容器的構造與工作原理

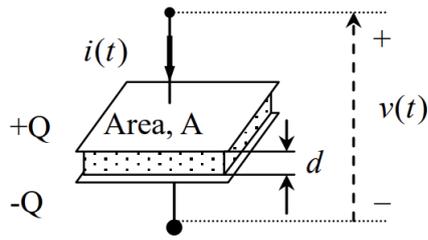


圖 2-2.2 電容器

如圖 2-2.2 所示，電容可以想成是二個金屬板中間夾著一塊介電材料 (dielectric material)；所謂介電材料是指其中沒有可以自由移動的自由電子，也就是非導體或絕緣體。每一個介電材料都有一個介電常數 (dielectric constant, ϵ)，介電常數的大小表示材料受外界電場作用時，內部分子的電偶矩 (electric dipole) 會因為外加電場而沿著電場方向排列的能力，如果將空氣的介電常數 (ϵ_0) 視為參考基準，則某一物質的介電常數除以空氣的介電常數就得到該物質的相對介電常數 (relative dielectric constant, ϵ_r)， $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ ，例如塑膠的介電常數約在 2~5 之間，水的介電常數為 81。電容的電容值與金屬板的面積大小 (A)、金屬板的間距 (d)、金屬板間介電材料的介電常數 (ϵ) 有關，在忽略邊緣效應 (edge effect) 的影響下，電容大小可以由下列公式得到：

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

因此電容大小正比於金屬板的面積大小與介電材料的介電常數，反比於金屬板的間距。因此在製作大電容之電容器時，需要考慮如何加大表面積 (A)、採用介電係數 (ϵ) 高的材料、與減小二電極之間的距離 (d)。

當有電流 ($i(t)$) 流入電容時，電荷堆積於金屬板，其電量為 $+Q(t)$ 與 $-Q(t)$ ，二金屬板之間有一電位差 ($v(t)$)，對電容器而言，電量與電位差之間保持一線性正比的關係，其比例常數就是電容值 (C)，亦即

$$Q = Cv$$

比較有用的數學關係式是將二邊微分以後得到

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (\text{注意：} i(t) = \frac{dQ}{dt})$$

如果將電容器想成是一個水桶，電流 $i(t)$ 是注入水桶的水流，桶內水面高度是電壓 $v(t)$ ，則電容 (C) 就是水桶的橫截面積。電容 (水桶截面積) 愈大，同樣電流的流入所造成的電壓上升速率就愈緩慢。電流流出電容器時也類似。

電容的單位是法拉第 (Faraday, F), 1F 是非常大的電容，因此實用的電容單位是 $\mu F, nF, pF$ 。

常用的 scale

m : mili,	$\times 10^{-3}$
μ : micro,	$\times 10^{-6}$
n : nano,	$\times 10^{-9}$
p : pico,	$\times 10^{-12}$
f : femto,	$\times 10^{-15}$
K : Kilo,	$\times 10^3$
M : Mega,	$\times 10^6$
G : Giga,	$\times 10^9$
T: Tera,	$\times 10^{12}$

2-2.3 電容器的阻抗

由電容的定義： $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$ ，如果考慮簡諧函數 (Harmonic Function) 型態的電壓與電流： $v(t) = V_0 e^{j\omega t}$ ，則 $i(t) = j\omega C V_0 e^{j\omega t}$ ；如果我們沿用之前 ”阻抗” (impedance) 的概念，亦即 ”阻抗” 為電壓對電流的比值，則電容器的阻抗 (impedance) 為 $Z_c = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$ 。注意，電容器的阻抗為一純虛數，且為頻率之函數。

這裡必須先解釋相位 (phasor) 與相位圖 (phasor diagram) 的概念。簡單的說，真實世界的物理量 (例如位移、力量、速度、電壓、電流等等) 應該是實數，將一個原本為實數的物理量改寫成複數是一常見的作法，尤其在數學或工數中解微分方程式時，時常引進複數，例如 $y(t) = A e^{\lambda t}$ ，其中， λ 的解如果是虛數或複數， $y(t)$ 即成為複數，此時實際上的物理量應該是 $y(t)$ 的實部，亦即 $y(t)$ 複數在 x 軸上的投影。選用複數的原因是方便，避免處理一大堆 \sin 與 \cos 函數，而只需要處理指數 (exponential) 函數 e^x 即可。

如過將上述電容的電壓與電流視為複數，並且只考慮簡諧函數，因此有 $v(t) = V_0 e^{j\omega t}$ ， $i(t) = I_0 e^{j\omega t} = j\omega V_0 e^{j\omega t}$ ，由於 $Z = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{1}{j\omega C}$ ，因此電壓與電流在複變平面上如圖 2-2.3 所示。由於電容器的阻抗為一純虛數，因此電壓電流之間除了其 ”振幅” 的比值由電容 (C) 與角頻率 (ω) 決定外，電壓與電流之間更因為有一個純虛數 $j (= \sqrt{-1})$ 的乘積關係，因此有一個 90° 的相位落差。

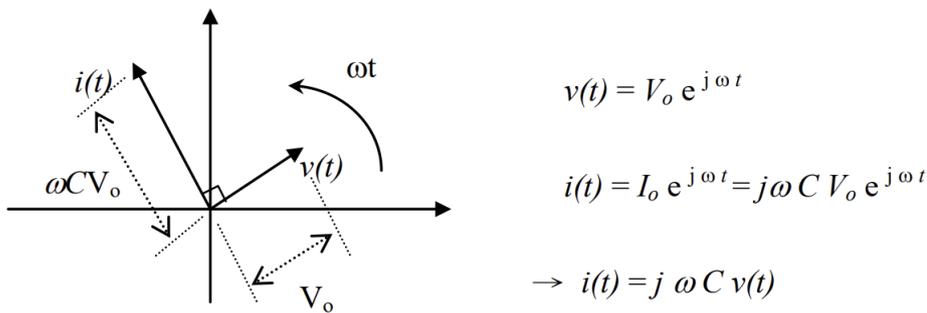


圖 2-2.3 電容器的電壓-電流相位圖

結論：

1. 電容的阻抗為 $Z = \frac{v(t)}{i(t)} = \frac{1}{j\omega C}$ ，因此電容的阻抗為頻率的函數，且與頻率成反比。頻率愈高時電容的阻抗愈小，極高頻時為一短路 (short)，電容可以視為不存在，或用一貫穿的導線替代；極低頻時電容的阻抗變的非常大，對直流電 (DC) 而言電容可以視為一開路 (open) 或斷路，因此不會有任何電流通過。換言之，針對同一個電容器，不同頻率的電子信號會“感受”到不同的阻抗值，高頻信號會“覺得”電容器的阻抗值甚小，因此很容易讓電流流過，低頻信號則會發現電容器的阻抗值很大，因此通過的電流會很小。
2. 電壓與電流之間永遠存在一個 90° 的相位差，如圖 2-2.4 所示，電壓落後電流 90° 。
3. 任何二個導體之間均存在一個電容，電容的大小與二導體之間的距離成反比，與二導體之間重疊的面積成正比。

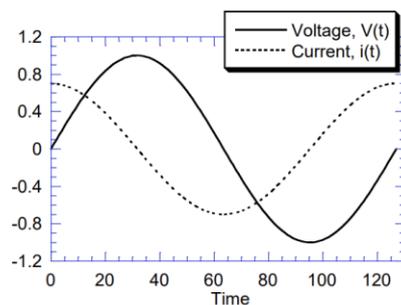


圖 2-2.4 電容器的電壓-電流相位關係

2-2.4 儲能元件

如前所述，電容器的阻抗是一個純虛數，因此會造成通過電容器的電壓與電流會有一個 90° 的相位差，此一事實，會使得電容器成為一個儲能元件；亦即當電流流入電容器時，電能是暫時儲存在電容器中，並未損耗掉；當電容器放電或電流流出電容器時，電容器會對外界做功，將此一儲存的電能還給外在的電路。因此，理想的電容器本身是不會消耗任何能量，此一特點與電阻非常不同，而有點類似彈簧，當受外力作用時，外力對彈簧做的功會轉換成彈力位能 (elastic energy)，儲存於彈簧之中，之後彈簧恢復其長度時，會再將能量還給外界的系統。

如果將電容器視為一個系統，假定在某一時間電容器二端的電位差為 $v(t)$ ，電容器內的電荷量為 $Q(t)$ ，當時流入電容器之電流為 $i(t)$ ，則外界對電容器做的功為

$$dW = v(t) \cdot dQ$$

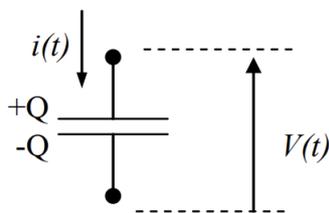
瞬間輸入功率為

$$P = \frac{dW}{dt} = v(t) \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{C} \cdot \frac{dQ}{dt}$$

因此，儲存於電容器內之電能為

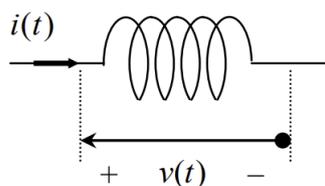
$$U = \int dW = \frac{1}{C} \int Q \cdot dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \cdot v^2$$

當然，在上式的推導中我們自由選定 $Q = 0$ 或 $v = 0$ 時電容器中的電能是 0。



2-3 電感

2-3.1 電感的工作原理



電感器事實上是一個線圈，線圈上通過的電流會引起磁場，磁場大小與電流大小成正比；磁場對時間的變化會引起感應電動勢，此一感應電動勢的大小正比於磁場對時間的變化率（因此也會正比於電流對時間的變化率， $\frac{di(t)}{dt}$ ），而感應電動勢的方向由冷次定律決定，也就是在阻止磁場對變化的方向上，或者是在阻止電流增加的方向上；因此，電感器上的跨壓必須要能先克服此一感應電動勢，才能驅動更多的電流通過電感器。因此電感器上的跨壓 $v(t)$ 與流過電感器的電流 $i(t)$ 之間有以下之關係

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

其中 L 為此電感器的電感值。電感的單位是亨利 (Henry, H)，1H 是非常大的電感，因此實用的電感單位是 $mH, \mu H, nH$ 。注意上式中，如果電流對時間的變化率為 0，亦即電流是一個常數，則電感器的跨壓是 0；另一種說法是：在直流電 (DC) 的情況下，電感器的阻抗為 0，類似一個無電阻的導線。

2-3.2 電感的阻抗

根據電感的定義 $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ ，如果考慮電壓與電流均為簡諧函數，因此有 $I_0 e^{j\omega t}$ ，則 $v(t) = j\omega L I_0 e^{j\omega t}$ ，因此電感的阻抗(impedance)為

$$Z = \frac{v(t)}{i(t)} = j\omega L$$

電感器上之電壓與電流的相位圖如下圖所示，類似於電容器，電感器的阻抗也是一個純虛數，因此電壓電流之間除了其“振幅”的比值由電感 (L) 與角頻率 (ω) 決定外，電壓與電流之間也有一個 90° 的相位落差，不同於電容器的是：電感器的電壓領先電流 90° 的相位。

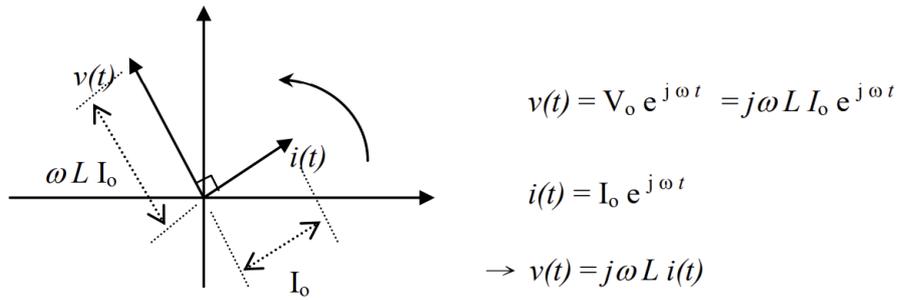


圖 2-3.1 電感器的電壓-電流相位圖

結論：

1. 電感的阻抗為 $Z = \frac{v(t)}{i(t)} = j\omega L$ ，電感的阻抗為頻率的函數，且與頻率成正比

比，頻率愈高阻抗愈大，極高頻時為一斷路，極低頻時 (DC) 為一通路。因此，針對同一個電感器，高頻的電子信號會覺得電感器的阻抗值非常大，因此電流不容易流過，低頻信號則會發現電感器的阻抗值很小，因此電流很容易通過。

2. 電壓與電流之間有一個 90° 的相位差，如圖 2-3.2 所示，電壓領先電流 90° 。
3. 任何導體形成迴路時均存在一個電感。

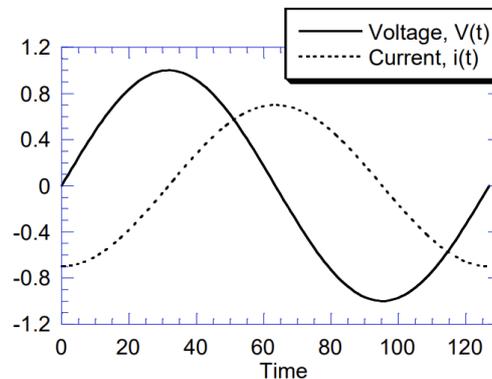


圖 2-3.2 電感器的電壓-電流相位關係

與電容器相似，電感器也是一個儲能元件，因此電流流經電感器，是將電能換成另一種型式儲存與電感器的磁場之中，分析如下。

$$P = \frac{dW}{dt} = v(t) \cdot i(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \cdot i(t), \text{ 或者 } dW = L \cdot i(t) \cdot di(t)$$

$$U = \int dW = L \int i \cdot di = \frac{1}{2} L \cdot i(t)^2$$

電感器的能量是儲存於電流 $i(t)$ 所引起的磁場中。

2-4 RC 電路分析與低通(low pass)、高通(high pass)濾波器

使用電阻、電容、電感三種元件，以及並聯於串聯的電路接法，可以產生許多種不同的 RLC 電路，利用 RLC 的複數阻抗表示方法，可以很容易的分析出電路的頻率響應，並且使電路產生濾波器的效果。

2-4.1 以阻抗分析 R-L-C 電路

對於由電阻構成的併聯與串聯電路，根據柯希赫夫電流與電壓定理，可以很輕易地得到電流與各個電阻上的壓降；當電路中出現電容或電感時，只要引入阻抗 (impedance) 的概念，同時將電流與電壓以複數 (complex) 與相位 (phasor) 的方式處理，即可輕易地將原本用於純電阻構成的電路分析，應用到 R-L-C 的電路之中。

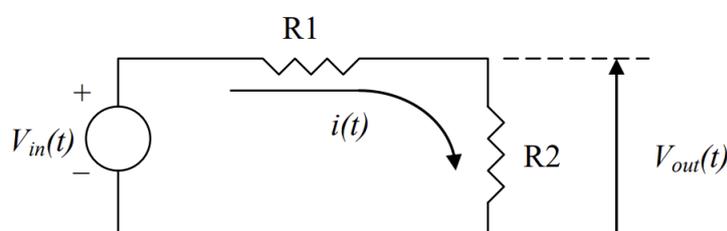


圖 2-4.1 分壓電路

首先看圖 2-4.1，是一個由二個電阻 R1 與 R2 構成的分壓電路，由柯希赫夫電流與電壓定理，可以很輕易地得到 $V_{out}(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V_{in}(t)$ 。

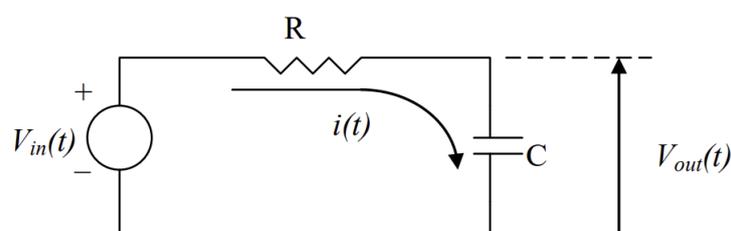


圖 2-4.2 RC 電路

如果將 R2 改成電容 C，則得到上圖 2-4.2 之電路。此一電路的分析方式，同樣依據柯希赫夫電流與電壓定理，但是需引入電壓電流的複數表示法，令 $V_{in}(t) = V_0 \cdot e^{j\omega t}$ ，同時引入電容的複數阻抗 ($Z = \frac{1}{j\omega C}$)，再一次利用分壓定律可以得到：

$$V_{out}(t) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot V_{in}(t) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot V_{in}(t)$$

再舉一個例子，如下圖，為一具有 R-L-C 的電路，由 $v(t)$ 與 $i(t)$ 的角度看進去，是一個電容 (C) 串聯另一個由電阻 (R) 與電感 (L) 並聯的電路，因此三者合起來的輸入阻抗為

$$\frac{v(t)}{i(t)} = Z_{in} = Z_1 + (Z_2 \parallel Z_3) = Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} = -\frac{j}{\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}}$$

因此可以得到電壓與電流的關係，如果電壓 ($v(t)$) 給定，即可求出電流 ($i(t)$)，並且得到各個元件 (R-L-C) 上的電流與跨壓。注意，輸入阻抗是一個複數， $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$ ，其實部 (R_{in}) 稱之為電阻 (Resistance，此處之 '電阻' 是指複數阻抗的實部，與電阻器之電阻不同)，其虛部 (X_{in}) 稱之為電抗 (Reactance)。

Impedance = Resistance + $j \times$ Reactance

阻抗 = 電阻 + j 電抗

由於輸入阻抗是一個複數，可以想見電壓 $v(t)$ 與電流 $i(t)$ 之間會有一個相位差 (除非 Reactance $X_{in} = 0$)；同時在一般的情況下，Resistance (R_{in}) 與 Reactance (X_{in}) 均為頻率(ω)之函數， $R_{in} = R_{in}(\omega)$ ， $X_{in} = X_{in}(\omega)$ ，因此電壓 $v(t)$ 與電流 $i(t)$ 之間的關係是頻率的函數。

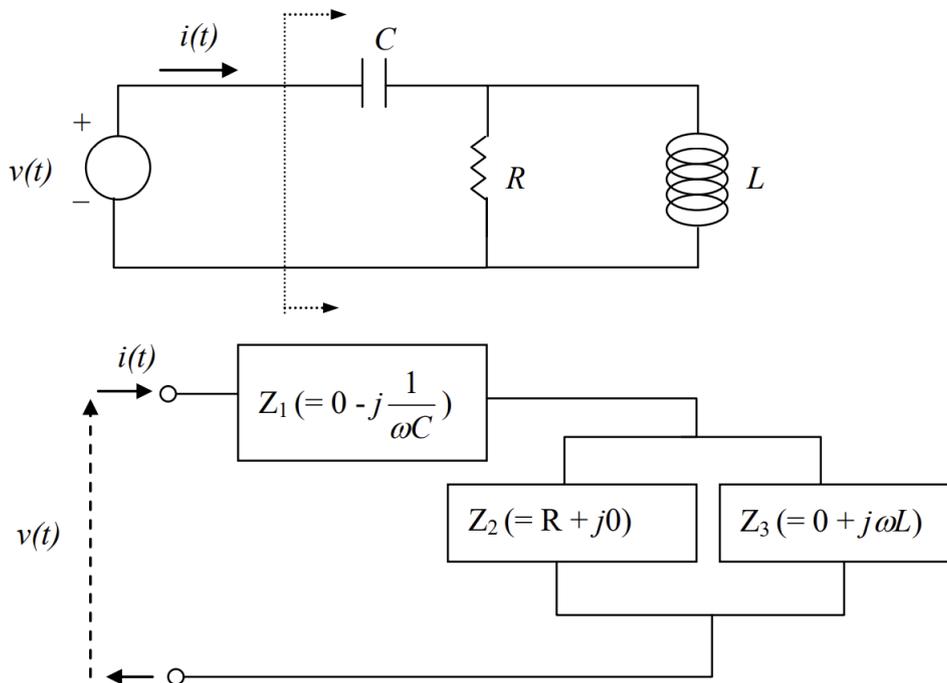
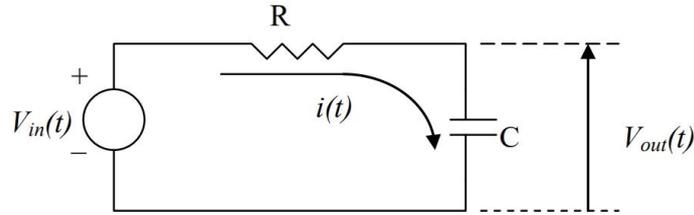


圖 2-4.3 R-L-C 組合電路

2-4.2 RC 電路---低通濾波器



重新考慮上圖中的電路，上一節中已經得到：

$$V_{out}(t) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} \cdot V_{in}(t) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot V_{in}(t)$$

或者

$$\frac{V_{out}(t)}{V_{in}(t)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} e^{j[-\arctan(\omega RC)]}$$

由以上之分析可知：輸出電壓與輸入電壓的比值（稱為放大倍率或電壓增益，Gain）為頻率的函數，

$$\left| \frac{V_{out}(t)}{V_{in}(t)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_o)^2}}, \text{ where } \omega_o = \frac{1}{RC} = 2\pi f_o$$

注意 RC 的單位為時間（註：Ohm × Farady = second），因此稱之為時間常數（time constant, $\tau=RC$ ）， τ 的倒數($1/\tau$)為角頻率(ω_o)，角頻率(ω_o)除以 2π 後即為一般的頻率 ($\omega = 2\pi f$)，單位為 Hz。

$\left| \frac{V_{out}(t)}{V_{in}(t)} \right|$ 對角頻率 ω 的作圖如圖 2-4.4 所示，可以看出這是一個低通濾波器

(low-pass filter)，可以抑制高頻的信號或雜訊。此低通濾波器的截止頻率由時間常數（time constant, $\tau=RC$ ）控制。截止頻率一般是指放大倍率（Gain）降低到 $\sqrt{2}/2 = 0.7071$ 時的頻率，由上述之公式得知，RC 低通濾波電路的截止頻率（角

頻率）恰巧為 RC 時間常數的倒數，也就是 $\omega_o = \frac{1}{RC} = 2\pi f_o$ ， f_o 也是截止頻率，

但是單位為 Hz。注意當 $\omega = \omega_o = \frac{1}{RC} = 2\pi f_o$ 時，輸出電壓與輸入電壓的比值（或

稱放大倍率）會由原本低頻（DC）時的 1 降到 $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$ ，這提供了一個測試

RC 值的方法。

另外，由於 $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ 為一複數，其相位角為 $-\tan^{-1}(\omega RC)$ ，亦即輸出電壓 V_{out} 與輸入電壓 V_{in} 有一相位差，如圖 2-4.4 中的右圖所示，且其相位差為頻率的函數。舉例而言，當 $\omega = \omega_o$ 時，相位角為 -45 度。這提供了另一個測試 RC 值的方法。

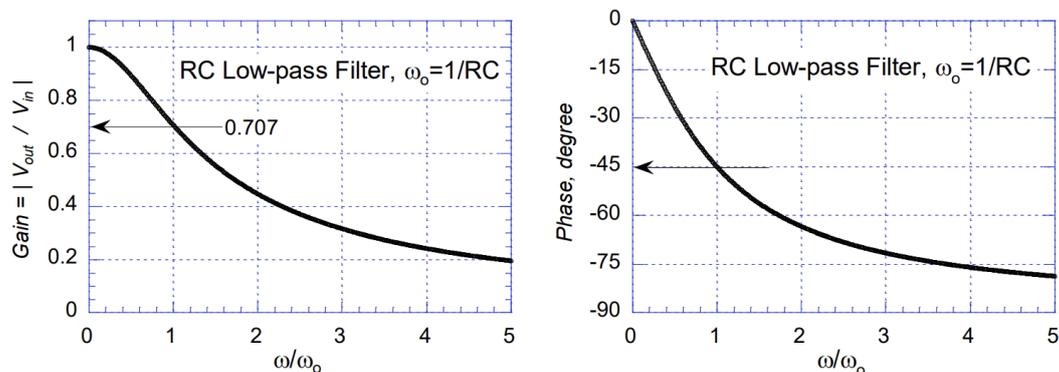


圖 2-4.4 RC 低通電路之電壓增益(Gain)與相位差(Phase)對頻率之關係圖

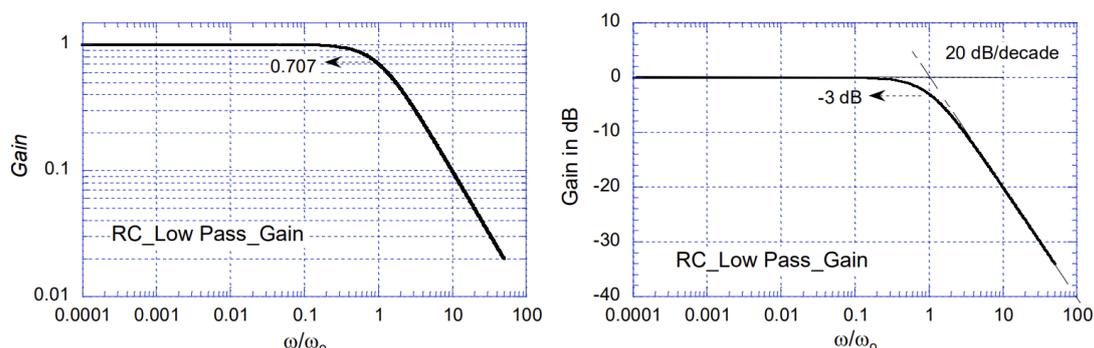


圖 2-4.5 RC 低通電路之電壓增益(Gain)對頻率之 Log Scale 圖(左)與dB增益(Gain)對頻率的Log Scale圖(右)

如果將 RC 電路的 Gain 對 ω/ω_o 的關係重新作圖，但是二者均採用 Log scale，會得到如上圖 2-4.5 中左圖的結果，由 Gain 對 ω/ω_o 的 Log scale 圖，可以較清楚地看出，除了在 $\omega = \omega_o \cong 1$ 的轉折點附近，Gain 對 ω/ω_o 的 Log scale 關係，可以由二條直線近似之。

同時，我們將引進 dB 的概念；dB 不同於一般的“單位”，它事實上是一個“比值”，同時以 Log scale 表現；既然是“比值”，因此涉及二個量，並且一定是二個“能量”或“功率”之間的比值。以功率為例，假設 p 為一功率， p_o 為另一個參考或比較的功率，則功率 p 的 dB 值定義為：

$$dB = 10 \cdot \log_{10} \frac{p}{p_0}$$

由於許多功率或能量均正比於某一個物理量的平方，例如電能或電功率正比於電壓 (V) 的平方，因此如果直接用電壓 (V) 與參考電壓 (V_0) 的比值，則電能或電功率的 dB 值會是：

$$dB = 10 \cdot \log_{10} \frac{p}{p_0} = 10 \cdot \log_{10} \frac{V^2}{V_0^2} = 20 \cdot \log_{10} \frac{V}{V_0}$$

回到 RC 電路的 Gain 對 ω/ω_0 的關係圖，如果採用輸出電能對輸入電能的 dB 值表示 Gain，則會得到上圖中右圖的結果，注意，因為已經換算成 dB 值，因此縱軸為 linear scale，同時 Gain=1 對應 0 dB、Gain=0.1 對應 -20 dB、Gain=0.01 對應 -40 dB；同時，當 ω/ω_0 時，Gain=0.707，對應之 dB 值為 -3 dB (或較正確的 -3.01dB)，因此 ω_0 又稱之為 -3 dB 的截止頻率，也就是當 $\omega = \omega_0$ 時，其電壓大小減少至約 70.7% 的水準，而其功率則是降低至 1/2 的水準。同理，-6 dB 的截止頻率可以定義為當電壓大小減少至 1/2 或功率降低至 1/4 的水準時的頻率。

以線性的 dB 值為縱軸，Log Scale 的頻率為橫軸，所得到的 Gain Frequency 關係圖稱之為波德圖中的增益圖，如上圖 2-4.5 中的右圖。對低通濾波器的 RC 電路而言，除了在 $\omega/\omega_0 = 1$ 的轉折點附近，其波德圖可以由二條直線近似之；低頻範圍內 ($\omega \ll \omega_0$) 為 $dB = -20 \log(\omega/\omega_0)$ 的直線，或者稱之為 20 dB per decade 的滾降率 (rolling off)；其意義是： ω 每增加 10 倍(a decade)，Gain 會減少 20 dB。由數學上而言，

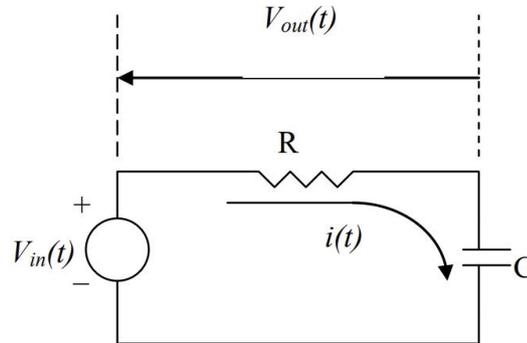
$$\left| \frac{V_{out}(t)}{V_{in}(t)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$

$$dB \text{ in Gain} = 20 \cdot \log_{10} \left| \frac{V_{out}(t)}{V_{in}(t)} \right| = -10 \cdot \log_{10} [1 + (\omega/\omega_0)^2]$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{for } \omega \ll \omega_0 \\ -20 \cdot \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right), & \text{for } \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

2-4.3 RC 電路---高通濾波器

考慮與前一節完全相同的 RC 電路，但是擷取電阻(R)上的電壓作為輸出信號，如下圖，則會得到



$$V_{out}(t) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot V_{in}(t) = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega RC}} \cdot V_{in}(t) = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_o}{\omega}} \cdot V_{in}(t),$$

$$\omega_o = \frac{1}{RC} = 2\pi f_0$$

$$\left| \frac{V_{out}(t)}{V_{in}(t)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_o / \omega)^2}},$$

如下圖 2-4.6 之左圖，可以看出這是一個高通濾波

器 (high-pass filter)，可以抑制低頻的信號。同樣地，此高通濾波器的截止頻率由時間常數 (time constant, $\tau=RC$) 控制。如果以 dB 值表示的波德圖表示，則為圖 2-4.6 之右圖，一樣可以由二條直線近似其 Gain 對頻率的關係。

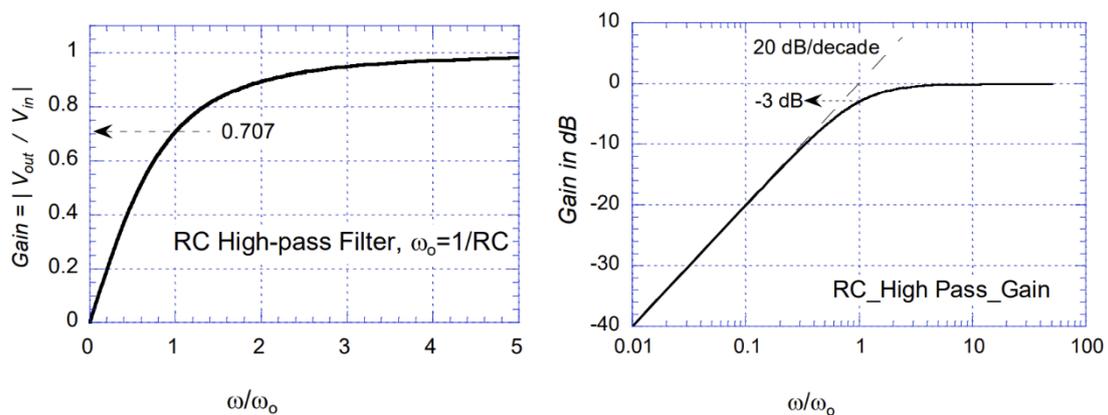
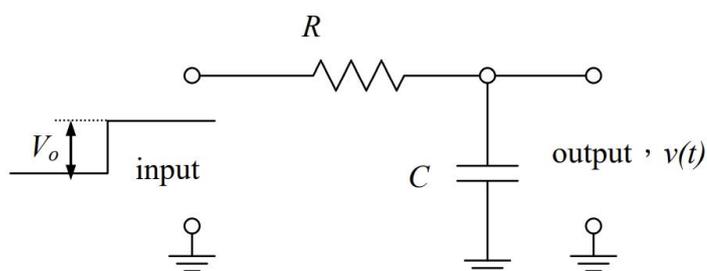


圖 2-4.6 RC 高通電路之電壓增益(Gain)對頻率之關係圖與dB增益(Gain)對頻率的Log Scale圖(右)

2-4.4 RC 電路的暫態分析

上述的 RC 電路只考慮穩態 (Steady State) 的分析，輸入信號為一簡諧函數。另一種常見的電路分析為暫態 (Transient) 分析，在暫態分析中，常用的輸入信號為脈衝信號 (impulse function or delta function, $\delta(t)$) 與步階信號 (unit step function, $u(t)$)。如下圖，輸入電壓為一類似 Heaviside step function 的步階方波信號，上升電壓為 V_o ，則輸出電壓 $v(t)$ 為何？



令 $i(t)$ 為流過電阻 R 與電容 C 的電流，則在 $t > 0$ 之後，有

$$i(t)R + v(t) = V_o$$

$$R \frac{di(t)}{dt} + \frac{dv(t)}{dt} = 0 \quad \text{or} \quad R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} i(t) = 0$$

在時間 $t=0$ 時，初始條件 $v(t=0)$ 應為 0 (因為電容器尚未充電，電壓為 0)，因此 $i(t=0) = V_o/R$ ；此一初始條件配合第 2 式，可以得到 $i(t) = \frac{V_o}{R} e^{-t/RC}$ ，並且得到

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = V_o (1 - e^{-t/RC})。$$

$v(t) = V_o (1 - e^{-t/RC})$ 表示電容受步階輸入電壓的影響，會由時間 $t=0$ 開始充

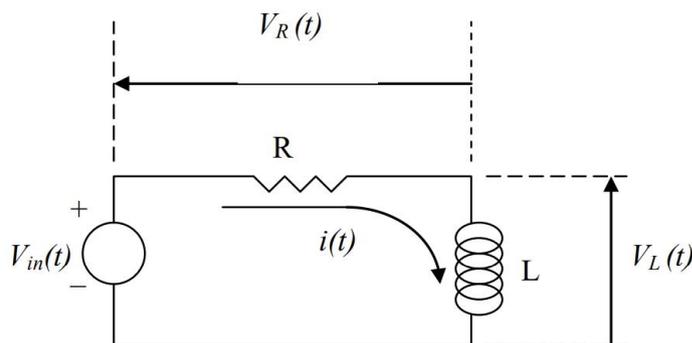
電，電壓由 0 逐步提升到 V_o (永遠達不到 V_o ，但可以非常接近 V_o)，一開始充電時速度非常快，但會逐漸慢下來，這是因為 $v(t)$ 與 V_o 的差距變小，導致電流 $i(t)$ 也變小，因此使電容充電的速度變慢。

因為 $e^{-1} \approx 0.37$ ，因此在時間 $t=RC$ 時，電容電壓 $v(t) = V_o (1 - e^{-1}) \approx 0.63 V_o$ ，這提供一個量測 $=RC$ 時間常數的簡單方法。

2-5 RL 電路分析

2-5.1 LC 電路的分析

如果以電感取代電容，即成為一個 RL 電路，如下圖。同樣地也可以由電阻 (R) 或電感 (L) 取出電壓，當作是輸出信號，並且成為濾波電路。如果由電阻 (R) 取出電壓當作輸出信號，則為一個低通濾波器；反之，如果由電感 (L) 取出電壓當作輸出信號，則為一個高通濾波器。



首先考慮由電阻 (R) 取出電壓當作輸出信號：

$$V_{out}(t) = V_R(t) = \frac{R}{R + j\omega L} \cdot V_{in}(t) = \frac{1}{1 + j\omega L/R} \cdot V_{in}(t) = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_o)} \cdot V_{in}(t)$$

$$\frac{V_{out}(t)}{V_{in}(t)} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_o)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_o)^2}} \cdot e^{-\tan^{-1}(\omega/\omega_o)}$$

其中， $\omega_o = \frac{R}{L} = 2\pi f_o$ ，也就是 LR 電路的時間常數(τ_{RL})是 L/R 。(註： $H/\Omega = \text{sec}$)。

如果只看振幅大小， $\left| \frac{V_{out}(t)}{V_{in}(t)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_o)^2}}$ ，因此是一個低通濾波器。

反之，如果由電感(L)取出電壓當作輸出信號：

$$V_{out}(t) = V_L(t) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \cdot V_{in}(t) = \frac{1}{1 + R/j\omega L} \cdot V_{in}(t) = \frac{1}{1 - j(\omega_o/\omega)} \cdot V_{in}(t)$$

$$\left| \frac{V_{out}(t)}{V_{in}(t)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_o/\omega)^2}}$$
，因此是一個高通濾波器。

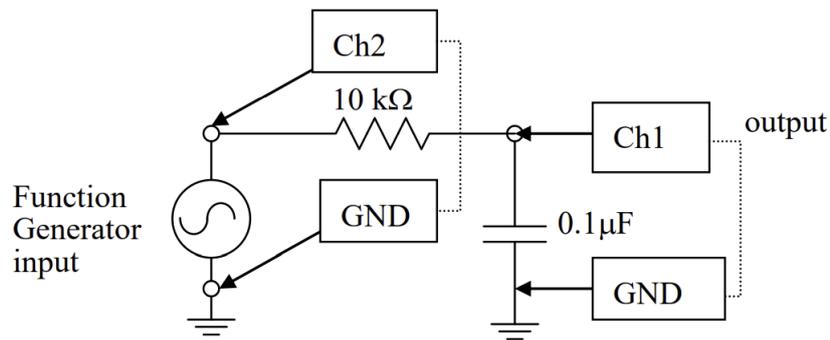
實驗部分

1. RC 低通電路的頻率響應

(a).接出 RC 低通電路同下圖，輸入信號為正弦波，頻率由低到高變化，以示波器的 CH1 與 CH2 分別監測輸出與輸入信號，由二者大小的比值決定電路在不同頻率下的放大倍率，由二者的相位決定電路在不同頻率下的相位，求得完整的頻率響應圖(包含增益-頻率以及相位-頻率圖)。

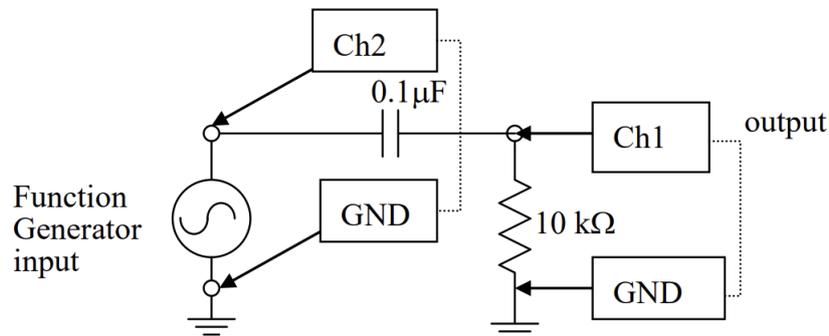
- 為了穩定觀測 Ch1 與 Ch2 之信號，應使用 Function Generator 的 Sync Out 作為示波器的外部觸發源(Ext Trigger)
- 頻率響應圖所取的頻率應從低頻到至少 $5\omega_0$ ，在這中間自行判斷要取幾個頻率量測點
- 相位的量測可以由 Cursor 量測 Ch1 波峰到 Ch2 波峰的時間差得到
- 簡單記錄幾個頻率下 Ch1 與 Ch2 的波形於實驗報告中

(b).比較理論與實驗結果。



2. RC 高通電路

重複實驗 1，但是由電阻上的跨壓作為電路的輸出信號，如下圖。注意示波器與函數信號產生器的接地問題。



3. 交流電路的工具(NI myDAQ)

(a).利用數位電錶量測電阻器的電阻值 R 、電容值 C ，並將量測結果填入下列空格中。

電阻器 R _____ (標準值 $1k\Omega$)

電容器 C _____ (標準值 $1\mu F$)

(b).利用訊號產生器以及示波器測試 RC 串聯電路

實驗步驟：

I. 在麵包板上用 $1\mu F$ 的電容和一個 $1k\Omega$ 的電阻建立一個分壓電路，如 Figure 3-5 所示。

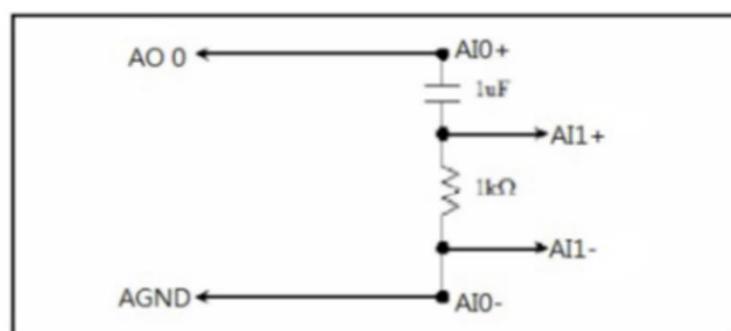


Figure 3-5 RC 電路圖

※我們利用經常被拿來測試 AC 電路的訊號產生器來進行我們的 RC 電路測試。在 NI ELVISmx Instrument Launcher 中選擇 FGGEN。

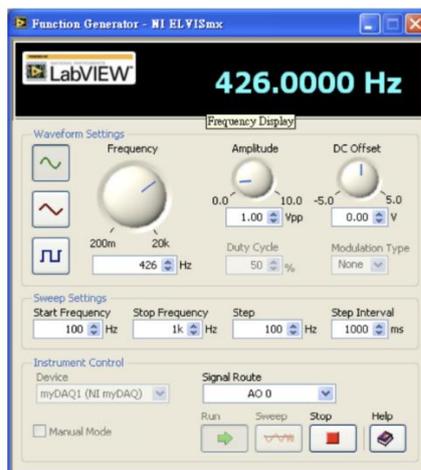


Figure 3-6 Function Generation 的軟體人機介面

II. 利用 FGGEN 的軟體人機介面有控制鈕可用來調整頻率、輸入波形以及訊號的強度。其中頻率的調整可分為兩個階段，包含十進位的粗調按鍵以及旋轉式的微調鈕；輸入波形則包含了正弦波、方波以及三角波。

※如果您想在 AC 訊號中加入 DC 偏壓，在軟體人機介面的 FGGEN 中能

使用 DC Offset 功能

III. 執行示波器分析 RC 電路的電壓訊號

- 在 NI ELVISmx Instrument Launcher 中選擇 Scope。

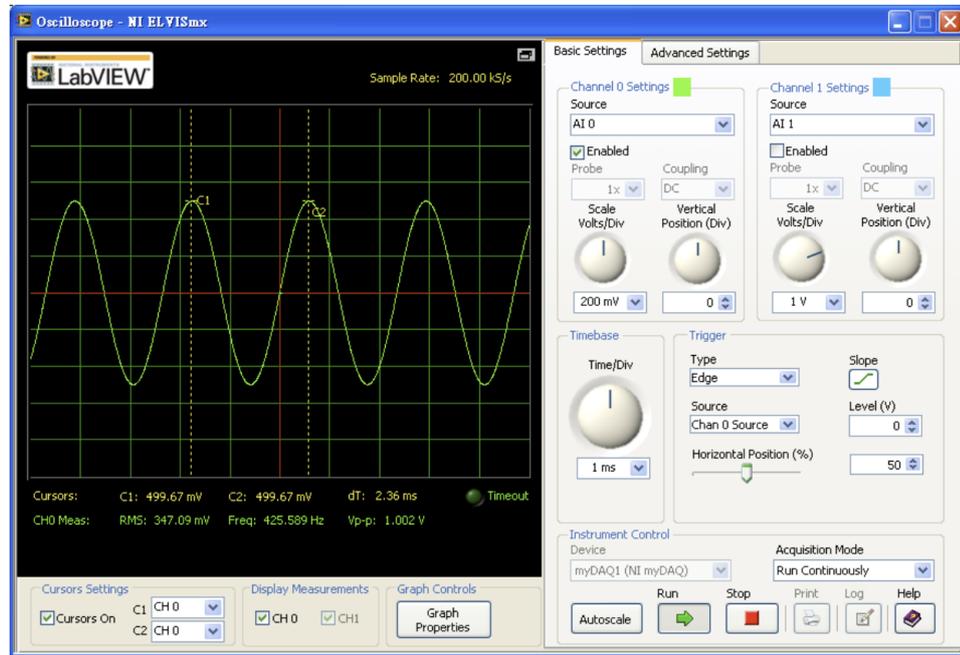


Figure 3-7 Oscilloscope

※NI ELVISmx 示波器的軟體人機介面面板跟大部份的示波器相似，但 NI ELVISmx 示波器可以自動將輸入端切換到多種不同的來源。點選 CHANNEL 0，在 Source 方塊中可以看到以下的選項列表：AI 0、AI 1、AudioInput Left、AudioInput Right。

- 選擇 CHANNEL 0 的 Source 之下拉選單。
- 按照 Figure 3-7 設定 Channel 0 的 Source, TRIGGER 以及 TIMEBASE 的輸入。這樣的設定值可以在 Channel 0 中觀察到訊號產生器所產生的訊號波形。
- FGEN SFP 以及 OSC SFP 上的 Run 按鍵。
- 藉由控制 FGEN，而在示波器的視窗上觀察其變化。

勾選 Display Measurements CH0，使示波器進行 Channel 0 中頻率以及波峰波谷、振幅的數值的量測，量測結果將顯示於示波器螢幕的下方。

- 接著將 AI1(Channel 1)輸入端連接到 1kΩ 的電阻。

在一特定頻率下，此時在 Channel 1 與 Channel 0 上的振幅比例則可定義為該頻率下電路的增益值。由於電路中沒有放大器，所以增益值通常小於 1。藉著調整不同的頻率並觀察其變化，就可以慢慢了解 RC 被動濾波器電路的頻率特性。

- 關閉訊號產生器以及示波器。

(c).RC 電路的增益/相位波德圖(Bode Plot)

實驗步驟：

- I. 在 NI ELVISmx Instrument Launcher 中選擇 Bode。

Bode Analyzer 可以針對某一特定的頻率範圍進行掃描，從起始頻率以一定的 ΔF 增加至最終頻率，同時您也可以設定正弦波測試訊號源的振幅大小。Bode Analyzer 利用軟體人機介面訊號產生器產生測試波形，AO 0 的輸出端必須同時接到您的測試電路以及 AI 0，測試中電路的輸出端則接到 AI 1。其他更詳細的功能請點選 Bode Analyzer 視窗右下方的[HELP]查詢。

- II. 按照上文所述，在 NI myDAQ 以及麵包板上重新接出類似 Figure 3-8 中的這個 RC 電路。

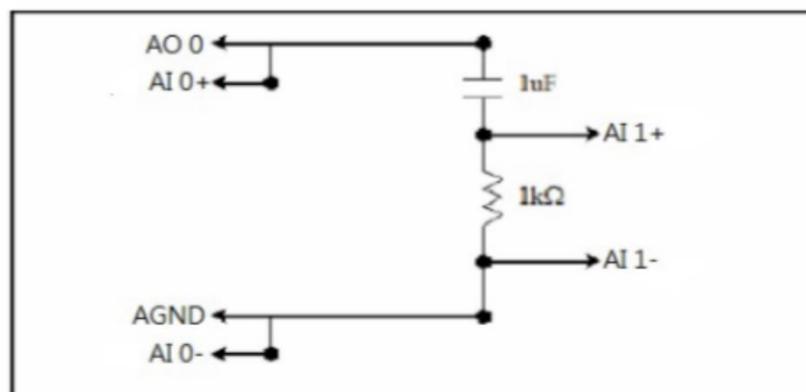


Figure 3-8 RC 電路圖

- III. 確認您的電路無誤之後，按下 Run 按鍵。

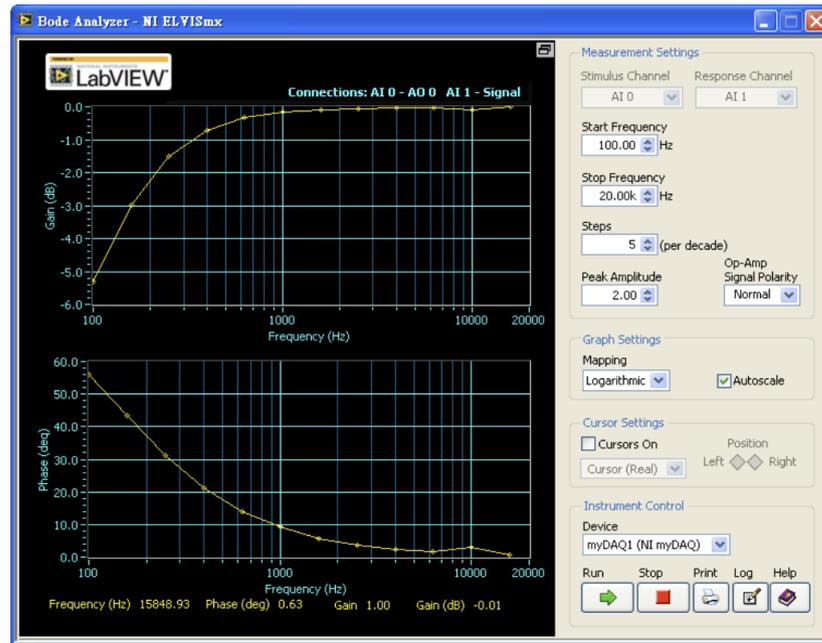


Figure 3-9 RC 電路的增益/相位波德圖

IV. 利用 Graph Settings 的功能選擇圖示的樣式，並利用游標來取出頻率的特性。

※振幅為-3dB 時的頻率與相位為 45 度時的頻率相同。

示波器以及 Bode Analyzer 的軟體人機介面都有 Log 的按鈕，當您執行此功能時，程式會將圖中的數據儲空白的表格檔案中，您可以用 Excel、LabVIEW、DIAdem 或是其他的方法將圖畫出來進行更深入的分析。

2013/8/9	下午 04:01		
Amplitude: 2.00 V			
Freq (Hz)	Gain (dB)	Phase (deg)	
20.000	-17.649	81.312	
31.698	-13.801	77.016	
50.238	-10.117	70.562	
79.621	-6.761	61.418	
126.191	-4.023	49.725	
200.000	-2.138	37.102	
316.979	-1.034	25.724	
502.377	-0.486	17.237	
796.214	-0.234	11.367	
1261.915	-0.121	7.183	
2000.000	-0.067	4.615	
3169.786	-0.040	2.959	
5023.773	-0.026	1.889	
7962.143	-0.019	1.207	
12619.147	-0.015	0.771	
20000.000	-0.012	0.514	

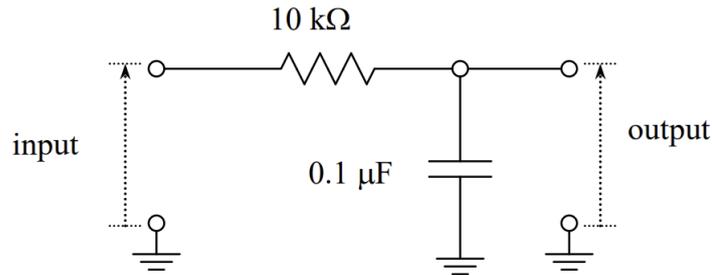
Figure 3-10 波得圖數據

預習作業

1. RC 電路

(a). 下圖為一個簡單的 RC 電路，請計算此電路的時間常數 (τ_{RC} ，RC time constant)、截止角頻率 (ω_0)、與截止頻率 (f_0)。請證明 $\Omega \times \text{Farad} = \text{sec}$ 。

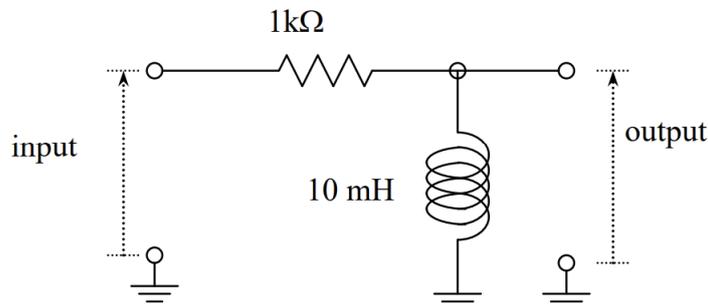
(b). 考慮簡諧波的輸入信號，計算此系統的頻率響應，亦即輸出信號 (output) 對輸入信號 (input) 的“放大倍率”與“相位差”。



2. RC 高通電路

重複第 1 題，但是由電阻上的跨壓作為電路的輸出信號。

3. RL 高通電路



(a). 上圖為一個簡單的 RL 電路，請計算此電路的時間常數 ($\omega_{RL} = L/R$ ，RL time constant)、截止角頻率 (ω_0)、與截止頻率 (f_0)。請證明 $\text{Henry}/\Omega = \text{sec}$ 。

(b). 考慮簡諧波的輸入信號，計算此系統的頻率響應，亦即輸出信號 (output) 對輸入信號 (input) 的“放大倍率”與“相位差”。

4. RL 低通電路

重複第 3 題，但是由電阻上的跨壓作為電路的輸出信號。

BOM 表

1.

元件名稱	規格	數量
電容	0.1 μ F	1
電阻	10K	1

2.

元件名稱	規格	數量
電容	0.1 μ F	1
電阻	10K	1

3.

元件名稱	規格	數量
電容	1 μ F	1
電阻	1K	1